Analisi 2. Primo Compitino. 21.11.2020

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

*Campo obbligatorio

1. Email *

2. Cognome *

Istruzioni di compilazione: Si usi:

· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· il carattere `_` per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

3. Nome *

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Domanda 1

Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) := 2(1+2x+y)e^{1+2xy}$. Consideriamo il polinomio di grado tre per f nel punto $P_0 = (-1,1)$; Questo polinomio si può scrivere:

$$P_{4,P_0}(x,y) = c_{0,0} + c_{1,0}(x+1) + c_{0,1}(y-1) + c_{2,0}(x+1)^2 + c_{1,1}(x+1)(y-1) + c_{0,2}(y-1)^2 + c_{3,0}(x+1)^3 + c_{2,1}(x+1)^2(y-1) + c_{1,2}(x+1)(y-1)^2 + c_{0,3}(y-1)^3$$

6. 1 punto

Si trovi $c_{1,1}$

7. 1 punto

Si trovi $c_{2,1}$

8. 1 punto

Si trovi $c_{1,2}$

9. Si trovi inoltre (2p.) 1 punto

Si trovi $\dfrac{\partial^3 f(-1,1)}{\partial x^3}$

10. Si trovi inoltre (2p.) 1 punto

Si trovi $\dfrac{\partial^3 f(-1,1)}{\partial x \partial y^2}$

Domanda 2

Sia $f = (f_1, f_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una funzione differenziabile tali che

$$f(0,0) = (-1,2) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = 3, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = -2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = 5,$$

Sia inoltre $h(x,y)$ definita da $h(x,y) := f_1(x,y)^2 - f_2(x,y)^2$.

11. 2 punti

Si trovi $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0)$=

12. 2 punti

Si trovi $\dfrac{\partial h}{\partial y}(0,0)$.

Domanda 3

Siano:

$$A := \{(x,y) : 0 \leq xy \leq 1, 0 \leq x\} \quad , \quad B := \{(x,y) : 0 < xy < 1, 0 \leq x\}.$$

Allora (1p. a risposta):

13. A è limitato — 1 punto

Contrassegna solo un ovale.

- SI'
- No

14. A è chiuso — 1 punto

Contrassegna solo un ovale.

- SI'
- No

15. B è aperto — 1 punto

Contrassegna solo un ovale.

- SI'
- No

16. Il punto (0,1) è — 1 punto

Contrassegna solo un ovale.

- interno ad A
- esterno ad A
- di frontiera per A

Domanda 4

Domanda 4 (4p.)

Consideriamo una matrice 4×4 A e le sue sottomatrici A_1, A_2 e A_3 come segue:

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} \end{pmatrix}, \; A_3 := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \; A_2 := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \; A_1 := \begin{pmatrix} a_{1,1} \end{pmatrix}$$

Con queste notazioni si scriva cosa chiede il criterio di Sylvester per avere che (a) A è definita strettamente positiva; (b) A è definita strettamente negativa.

17. Criterio (a)

2 punti

18. Criterio (b)

2 punti

Domanda 5

Si risponda alla seguente domanda (4p.)

Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$$\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), -2t) = \sin(t)\vec{\mathbf{i}} + \cos(t)\vec{\mathbf{j}} - 2t\vec{\mathbf{k}}.$$

Allora:

19. 1 punto

γ è una curva chiusa

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

20. 1 punto

$\gamma'(t)$ ha modulo costante

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

21. 1 punto

$\gamma(t)$ è ortogonale a $\gamma'(t)$

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

22. 2 punti

Si trovi la lunghezza di γ: $\ell(\gamma) =$

Domanda 6

Sia $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una forma quadratica. Indichiamo:

$$B := \{x \in \mathbb{R}^N \, : \, \|x\| \leq 1\} \qquad , \qquad S := \{x \in \mathbb{R}^N \, : \, \|x\| = 1\}.$$

Allora:

23. 1 punto

φ è definita strettamente positiva se e solo se $\min_{x \in S} \varphi(x) > 0$

Contrassegna solo un ovale.

- Vero
- Falso

24. 1 punto

φ è definita strettamente positiva se e solo se $\min_{x \in B} \varphi(x) > 0$

Contrassegna solo un ovale.

- Vero
- Falso

25. 1 punto

φ è definita positiva se e solo se $\min_{x \in S} \varphi(x) \geq 0$

Contrassegna solo un ovale.

- Vero
- Falso

26. 1 punto

φ è definita strettamente positiva se e solo se $\min_{x \in B} \varphi(x) \geq 0$

Contrassegna solo un ovale.

- Vero
- Falso

Domanda 7

Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := -9x^3 + y^4 + 24xy$.

27. 2 punti

(A) Si dica quanti punti stazionari ha f

28. 1 punto

(B) Si dica quanti sono, tra i punti critici, quelli di massimo relativo

29. 1 punto

(C) Si dica quanti sono, tra i punti critici, quelli di minimo relativo

30. 1 punto

(D) Si dica quanti sono, tra i punti critici, quelli di sella

31. 1 punto

(E) Si dica se f ha massimo su $\mathbb{R}^2$

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

32. 1 punto

(F) Si dica se f ha minimo su $\mathbb{R}^2$

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

33. Si motivino le due risposte precedenti, indicando eventualmente quali risultati teorici sono stati utilizzati (senza mettere i calcoli). Nel caso in cui esistano si scrivano il valore massimo e il valore minimo di f (2p.) 2 punti

Domanda 8

Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{5x^2+3y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

34. Si dica se f è continua — 1 punto

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

35. Si dica qual è la risposta corretta riguardo l'esistenza delle derivate direzionali f'(0,0)(v) — 1 punto

Contrassegna solo un ovale.

- non esiste per nessun vettore v
- esiste per alcuni v ma non per tutti
- esiste per tutti i vettori v, ma non è lineare in v
- esiste per tutti i vettori v ed è lineare in v

36. Si dica se f è differenziabile in (0,0) e si spieghi come si è giunti alla conclusione, indicando i passaggi ma senza riportare i calcoli. — 3 punti